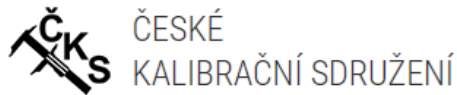
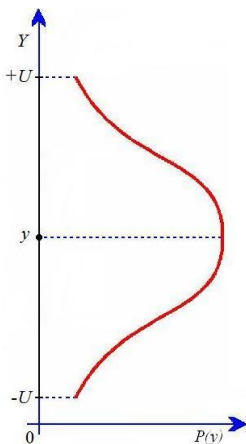


Porovnání GUM a metody Monte Carlo

Ing. Tomáš Hajduk

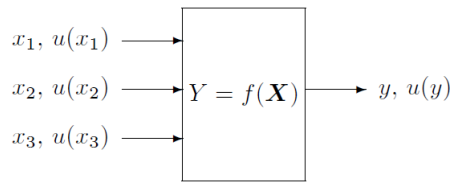


Nejistota měření

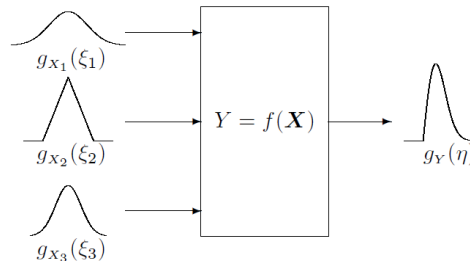


- Parametr přiřazený k výsledku měření
- Vymezuje interval, o němž se s určitou úrovní pravděpodobnosti předpokládá, že v něm leží skutečná hodnota měřené veličiny
- $Y = y \pm U$

GUM uncertainty framework (EA-4/02)



Metoda Monte Carlo



28.3.2017

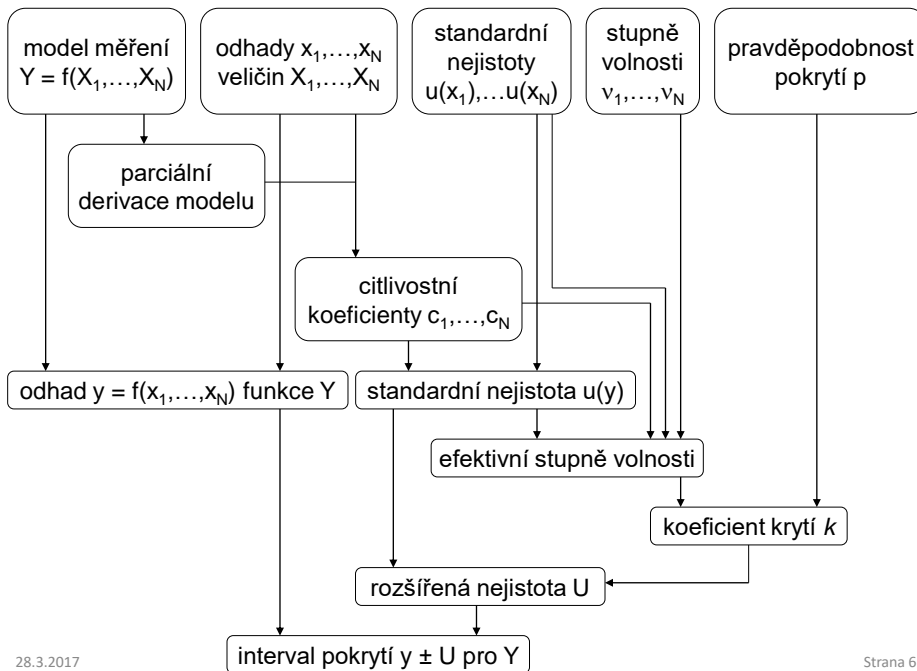
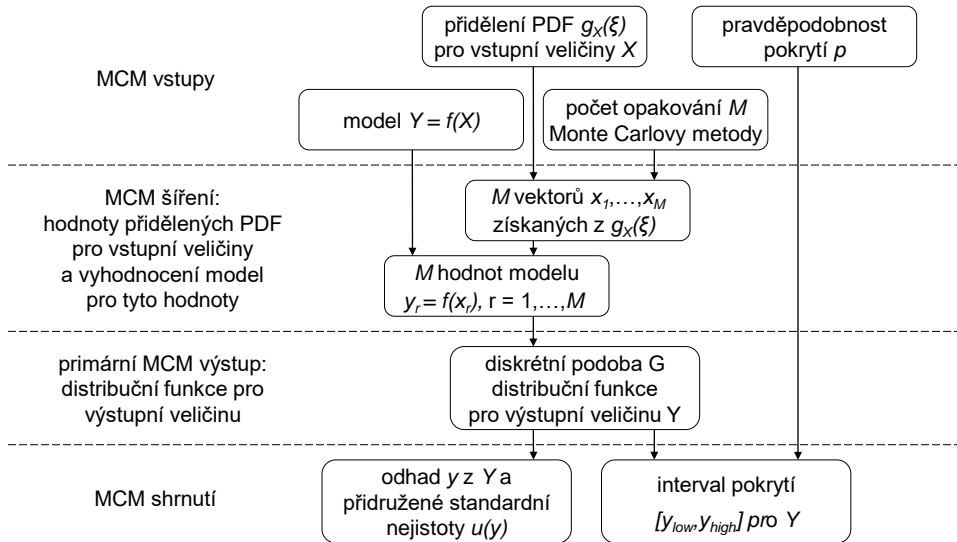
Strana 3

Metoda Monte Carlo

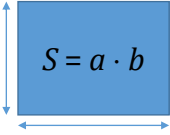
- Třída algoritmů pro simulaci systémů
- Stochastické systémy používající pseudonáhodná čísla
- Široké využití
 - Simulace experimentů
 - Počítání určitých integrálů
 - Řešení diferenciálních rovnic
- Velice jednoduchá základní myšlenka

28.3.2017

Strana 4



Měření plochy obdélníku

$$a = a_0 + \delta a_{\text{op}} + \delta a_{\text{cal}}$$


$$b = b_0 + \delta b_{\text{op}} + \delta b_{\text{cal}}$$

a_0, b_0 výsledky měření stran obdélníku [mm]
 $\delta a_{\text{op}}, \delta b_{\text{op}}$ chyba opakovatelnosti [mm]
 $\delta a_{\text{cal}}, \delta b_{\text{cal}}$ chyba kalibrace měřidla [mm]

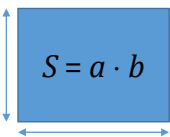
➤ měření obou stran obdélníku pomocí stejného měřidla

$$\delta a_{\text{cal}} = \delta b_{\text{cal}} \Rightarrow \text{korelované vstupní veličiny}$$

28.3.2017

Strana 7

Měření plochy obdélníku

$$a = a_0 + \delta a_{\text{op}} + \delta a_{\text{cal}}$$


$$b = b_0 + \delta b_{\text{op}} + \delta b_{\text{cal}}$$

$a_0 = 30 \text{ mm}$ $b_0 = 40 \text{ mm}$
 $u_{\text{op}}(a) = 0,4 \text{ mm}$ $u_{\text{op}}(b) = 0,5 \text{ mm}$
 $u_{\text{cal}} = 1 \text{ mm}$

28.3.2017

Strana 8



Měření plochy obdélníku (GUM)

Měření strany a (opakovatelnost):

odhad:	30 mm
nejistota:	0,4 mm

Měření strany a (kalibrace):

odhad:	0 mm
nejistota:	1 mm

$$u(a) = \sqrt{u_{\text{op}}^2(a) + u_{\text{cal}}^2} = \sqrt{0,4^2 + 1^2} = 1,08 \text{ mm}$$



Měření plochy obdélníku (GUM)

Měření strany b (opakovatelnost):

odhad:	40 mm
nejistota:	0,5 mm

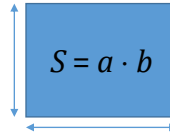
Měření strany b (kalibrace):

odhad:	0 mm
nejistota:	1 mm

$$u(a) = \sqrt{u_{\text{op}}^2(a) + u_{\text{cal}}^2} = \sqrt{0,5^2 + 1^2} = 1,12 \text{ mm}$$

Měření plochy obdélníku (GUM)

Citlivostní koeficienty:



$$c(a) = \frac{\partial S}{\partial a} = b = 40 \text{ mm}$$

$$c(b) = \frac{\partial S}{\partial b} = a = 30 \text{ mm}$$

Měření plochy obdélníku (GUM)

Výpočet standardní nejistoty (bez korelace):

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N [c_i \cdot u(x_i)]^2}$$

Výpočet standardní nejistoty (s korelací):

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N [c_i \cdot u(x_i)]^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N [c_i \cdot c_j \cdot u(x_i) \cdot u(x_j) \cdot r(x_i; x_j)]}$$



Měření plochy obdélníku (GUM)

Výpočet plochy S (bez korelace): $S = a \cdot b = 30,0 \cdot 40,0 = 1200,0 \text{ mm}^2$

měření strany a:	30 mm
nejistota:	1,08 mm
citlivostní koeficient:	40 mm
měření strany b:	40 mm
nejistota:	1,12 mm
citlivostní koeficient:	30 mm

$$u(S) = \sqrt{c^2(a) \cdot u^2(a) + c^2(b) \cdot u^2(b)} = \sqrt{40^2 \cdot 1,08^2 + 30^2 \cdot 1,12^2} = 54,6 \text{ mm}^2$$

28.3.2017

Strana 13



Měření plochy obdélníku (GUM)

Výpočet plochy S (s korelací): $S = a \cdot b = 30,0 \cdot 40,0 = 1200,0 \text{ mm}^2$

měření strany a:	30 mm
nejistota:	1,08 mm
citlivostní koeficient:	40 mm
měření strany b:	40 mm
nejistota:	1,12 mm
citlivostní koeficient:	30 mm
korelační koeficient:	0,84

$$u(S) = \sqrt{(c(a) \cdot u(a))^2 + (c(b) \cdot u(b))^2 + 2 \cdot c(a) \cdot c(b) \cdot u(a) \cdot u(b) \cdot r(a; b)} = 73,5 \text{ mm}^2$$

28.3.2017

Strana 14

Měření plochy obdélníku (GUM)

Výpočet plochy S (bez korelace):

$$u(S) = 54,6 \text{ mm}^2$$

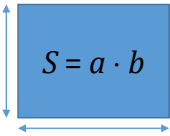
$$S = (1200,0 \pm 109,2) \text{ mm}^2$$

Výpočet plochy S (s korelací):

$$u(S) = 73,5 \text{ mm}^2$$

$$S = (1200,0 \pm 147,0) \text{ mm}^2$$

Měření plochy obdélníku

$$a = a_0 + \delta a_{\text{op}} + \delta a_{\text{cal}}$$


$$b = b_0 + \delta b_{\text{op}} + \delta b_{\text{cal}}$$

$$S = a \cdot b = (a_0 + \delta a_{\text{op}} + \delta a_{\text{cal}}) \cdot (b_0 + \delta b_{\text{op}} + \delta b_{\text{cal}})$$

$$\delta a_{\text{cal}} = \delta b_{\text{cal}}$$



Měření plochy obdélníku

S	a _{corr}	b _{corr}
[mm ²]	[mm]	[mm]
942.06	26.20	35.95
1184.79	29.43	40.25

28.3.2017

Strana 19



Měření plochy obdélníku

S	a _{corr}	b _{corr}
[mm ²]	[mm]	[mm]
942.06	26.20	35.95
1184.79	29.43	40.25
1175.72	29.78	39.47

28.3.2017

Strana 20



Měření plochy obdélníku

S	a _{corr}	b _{corr}
[mm ²]	[mm]	[mm]
942.06	26.20	35.95
1184.79	29.43	40.25
1175.72	29.78	39.47
1177.27	29.29	40.19
1165.32	29.88	39.00

28.3.2017

Strana 21



Měření plochy obdélníku

S	a _{corr}	b _{corr}
[mm ²]	[mm]	[mm]
942.06	26.20	35.95
1184.79	29.43	40.25
1175.72	29.78	39.47
1177.27	29.29	40.19
1165.32	29.88	39.00
1168.51	29.23	39.98
1215.38	30.52	39.82
1241.12	30.83	40.26
1313.61	31.85	41.25
1120.26	28.83	38.85

28.3.2017

Strana 22



Měření plochy obdélníku

S	a _{corr}	b _{corr}
[mm ²]	[mm]	[mm]
942.06	26.20	35.95
1184.79	29.43	40.25
1175.72	29.78	39.47
1177.27	29.29	40.19
1165.32	29.88	39.00
1168.51	29.23	39.98
1215.38	30.52	39.82
1241.12	30.83	40.26
1313.61	31.85	41.25
1120.26	28.83	38.85
.	.	.
.	.	.
.	.	.

28.3.2017

Strana 23



Měření plochy obdélníku (MCM)

Generátor pseudonáhodných čísel

Počet proměnných: 1

Počet náhodných čísel: 25000

Typ rozložení: Normální

Parametry

Střední hodnota = 30

Směrodatná odchylka = 0.4

Základ generátoru: 15

Možnosti výstupu

Výstupní oblast: \$C\$12

Nový list:

Nový sešit

OK Storno Nápověda

28.3.2017

Strana 24



Měření plochy obdélníku (MCM)

Generátor pseudonáhodných čísel

Počet proměnných: 1

Počet náhodných čísel: 25000

Typ rozložení: Normální

Parametry

Střední hodnota = 40

Směrodatná odchylka = 0.5

Základ generátoru: 20

Možnosti výstupu

Výstupní oblast: \$D\$12

Nový list:

Nový sešit

Buttons: OK, Storno, Nápořádá

28.3.2017

Strana 25



Měření plochy obdélníku (MCM)

Generátor pseudonáhodných čísel

Počet proměnných: 1

Počet náhodných čísel: 25000

Typ rozložení: Normální

Parametry

Střední hodnota = 0

Směrodatná odchylka = 1

Základ generátoru: 25

Možnosti výstupu

Výstupní oblast: \$E\$12

Nový list:

Nový sešit

Buttons: OK, Storno, Nápořádá

28.3.2017

Strana 26



Měření plochy obdélníku (MCM)

a =	30	mm				S =	1200.4	mm ²		p =	0.95
u ₉₅ (a) =	0.4	mm				u(S) =	73.4	mm ²		M =	25000
b =	40	mm				r(a; b) =	0.83			q =	23750
u ₉₅ (b) =	0.5	mm				S _e =	1058.186	mm ²		r _e =	625
ucal =	1	mm				S _u =	1347.448	mm ²			

$$S = a \cdot b$$

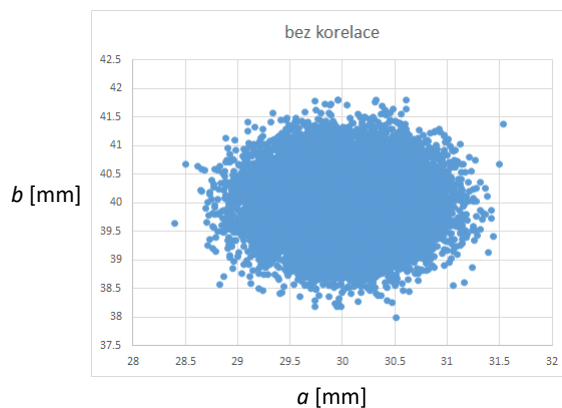
S	a	b	cal	a _{corr}	b _{corr}	i	S	α
[mm ²]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[-]	[mm ²]	[-]
942.0626	28.88497	38.63379	-2.6817	26.20327	35.95209	1	608.637	0.00002
1184.787	29.59525	40.41352	-0.16123	29.43402	40.25229	2	921.001	0.00006
1175.717	30.37494	40.0648	-0.59054	29.78439	39.47426	3	926.993	0.0001
1177.274	29.46287	40.35551	-0.16821	29.29466	40.18731	4	942.0626	0.00014
1165.32	30.96143	40.08278	-1.08202	29.87941	39.00077	5	945.1501	0.00018
1168.514	29.59815	40.34787	-0.3695	29.22864	39.97837	6	949.9979	0.00022
1215.377	30.18716	39.49233	0.331594	30.51876	39.82393	7	951.7432	0.00026
1241.12	30.14905	39.57671	0.680625	30.82967	40.25733	8	953.7913	0.0003
1313.608	30.46473	39.86918	1.380527	31.84526	41.24971	9	956.1895	0.00034
1120.261	29.5297	39.54562	-0.69477	28.83493	38.85085	10	957.7325	0.00038
1058.985	29.51137	39.32451	-1.50808	28.00329	37.81643	11	962.311	0.00042
1326.001	30.46551	40.59878	1.232943	31.69845	41.83173	12	962.6022	0.00046
1289.08	29.61711	40.05952	1.443104	31.06021	41.50263	13	964.0186	0.0005
1208.324	30.08373	39.38041	0.338309	30.42204	39.71872	14	964.1557	0.00054
1208.515	30.31643	39.52638	0.145978	30.4624	39.67236	15	965.7795	0.00058
1213.966	29.92192	39.25537	0.564512	30.48643	39.81988	16	965.7894	0.00062
1251.591	30.04953	40.18107	0.623377	30.67291	40.80445	17	966.6953	0.00066
1239.211	29.71302	39.16775	1.078042	30.79106	40.24579	18	969.297	0.0007

28.3.2017

Strana 27



Měření plochy obdélníku (MCM)

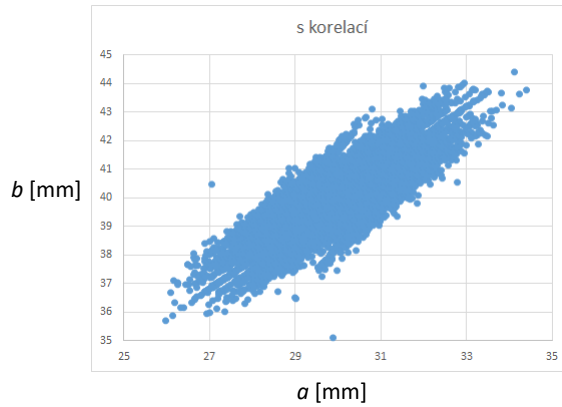


28.3.2017

Strana 28



Měření plochy obdélníku (MCM)

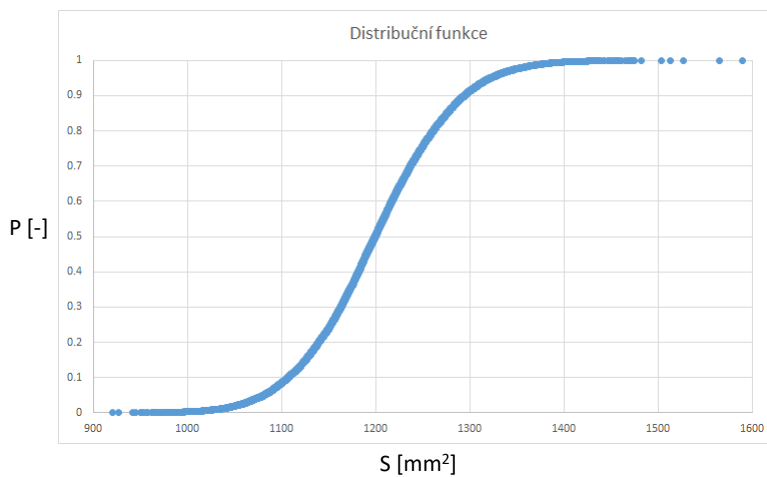


28.3.2017

Strana 29



Měření plochy obdélníku (MCM)



28.3.2017

Strana 30

Měření plochy obdélníku (GUM)

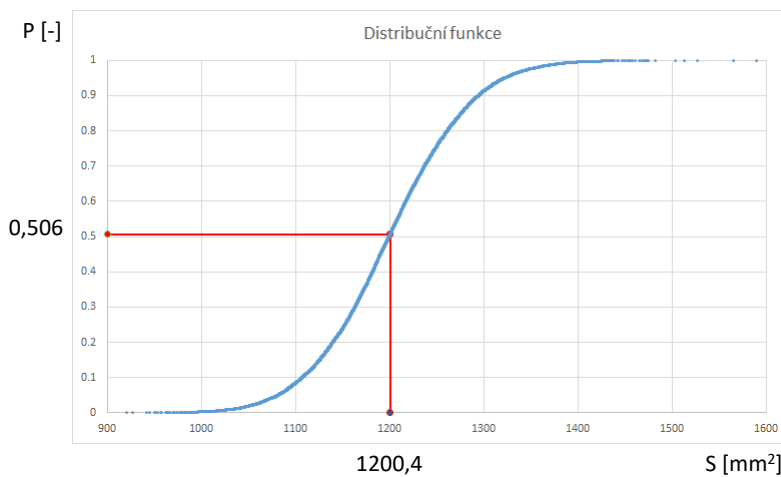
Odhad výstupní veličiny:

$$\tilde{y} = \frac{1}{M} \sum_{r=1}^M y_r$$

Přidružená standardní nejistota:

$$u^2(\tilde{y}) = \frac{1}{M-1} \sum_{r=1}^M (y_r - \tilde{y})^2$$

Měření plochy obdélníku (MCM)





Měření plochy obdélníku (GUM)

Určení intervalu pokrytí:

$$p = 0,95$$

$$M = 25000$$

$$q = p \cdot M = 23750$$

$$r_- = \frac{M - q}{2} = 625$$

$$r_+ = M - r_- = 24375$$

28.3.2017

Strana 33



Měření plochy obdélníku (GUM)

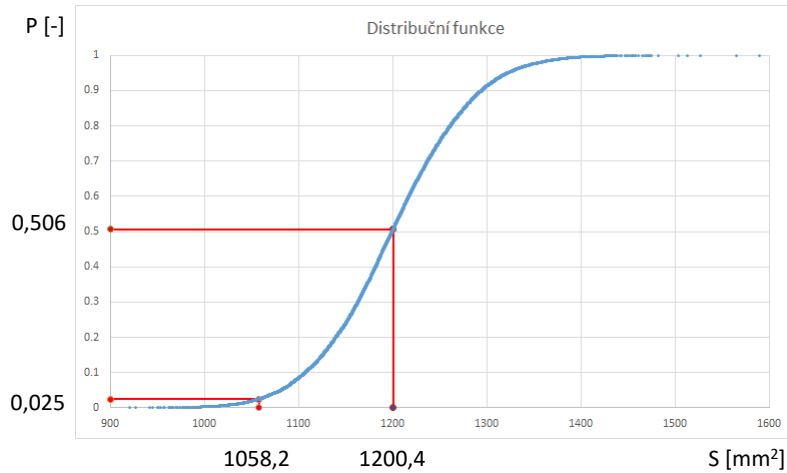
r	S
[-]	[mm ²]
1	608.64
2	921.00
3	926.99
4	942.06
5	945.15
.	.
.	.
625	1058.2
.	.
.	.
24375	1347.4
.	.
.	.
24999	1600.0
25000	1608.9

28.3.2017

Strana 34



Měření plochy obdélníku (MCM)

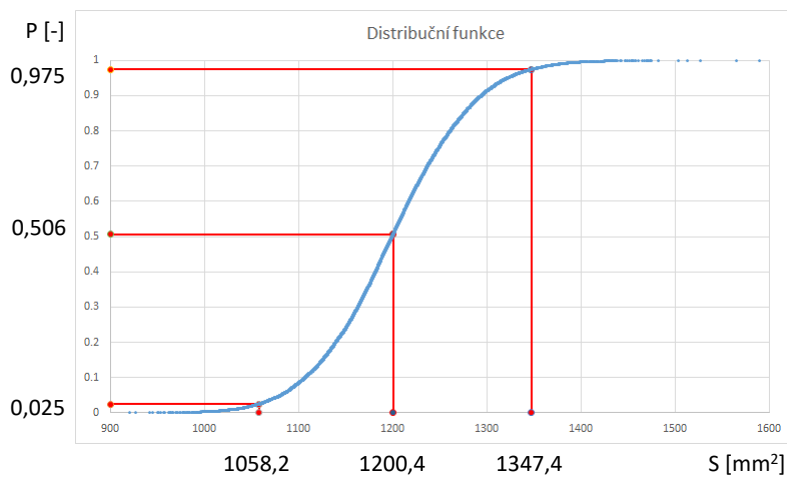


28.3.2017

Strana 35



Měření plochy obdélníku (MCM)



28.3.2017

Strana 36



Měření plochy obdélníku (MCM)

Výpočet plochy S (s korelací):

$$S = 1200,4 \text{ mm}^2$$

$$u(S) = 73,4 \text{ mm}^2$$

$$S_- = 1058,2 \text{ mm}^2$$

$$S_+ = 1347,4 \text{ mm}^2$$

$$U_- = S - S_- = 142,2 \text{ mm}^2$$

$$U_+ = S_+ - S = 147,0 \text{ mm}^2$$

28.3.2017

Strana 37



Měření plochy obdélníku

Výpočet plochy S (bez korelace):

$$S_{\text{GUM}} = 1200,0 \text{ mm}^2 \quad [-109,2 ; 109,2]_{95\%}$$

$$S_{\text{MCM}} = 1199,3 \text{ mm}^2 \quad [-105,0 ; 109,1]_{95\%}$$

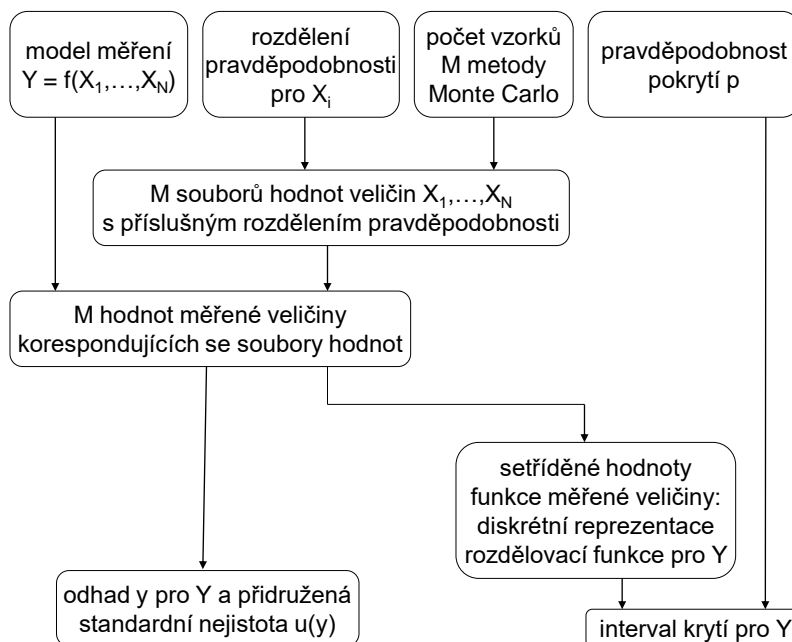
Výpočet plochy S (s korelací):

$$S_{\text{GUM}} = 1200,0 \text{ mm}^2 \quad [-147,0 ; 147,0]_{95\%}$$

$$S_{\text{MCM}} = 1200,4 \text{ mm}^2 \quad [-142,2 ; 147,0]_{95\%}$$

28.3.2017

Strana 38



28.3.2017

Strana 39

Děkuji za pozornost